לוגיקה (1) פתרונות תרגיל 3

1.

א. $R(z,x,y)$.

ב. נשים לב שקיימת נקודה אחת ויחידה הקרובה ביותר לישר, לכן:

$$P(p) \wedge P(q) \wedge L(l) \wedge I(p,l) \wedge$$
$$\forall p'(I(p',l) \wedge R(q,p',p) \rightarrow p' \approx p)$$

ג. נסמן את הנוסחה שקיבלנו ב-ב' ע"י $\varphi(q,p,l)$ אז נאמר:

$$P(p_1) \wedge P(p_2) \wedge P(p_3) \wedge$$
$$\neg(p_1 \approx p_2) \wedge \neg(p_1 \approx p_3) \wedge \neg(p_3 \approx p_2) \wedge$$
$$\forall l_1 \forall l_2 \forall l_3 (L(l_1) \wedge L(l_2) \wedge L(l_3) \wedge$$
$$I(l_1,p_1) \wedge I(l_1,p_2) \wedge I(l_2,p_1) \wedge I(l_2,p_3) \wedge I(l_3,p_2) \wedge I(l_2,p_3) \rightarrow$$
$$(\varphi(p_3,p_1,l_1) \vee \varphi(p_3,p_2,l_1) \vee \varphi(p_2,p_1,l_2) \vee \varphi(p_2,p_3,l_2) \vee$$
$$\varphi(p_1,p_2,l_3) \vee \varphi(p_1,p_3,l_3)))$$

(כאשר נוסחה זו אומרת שהמשולש הוא ישר זווית אם המצב המתואר בסעיף ב' מתקיים לאיזשהו זוג מבין שלוש הנקודות הנ"ל ואחד הישרים הנקבעים על ידן).

ד. חוצה הזווית הוא במרחק שווה מן הצלעות הקובעות את הזווית:

$$L(l) \wedge P(p_1) \wedge P(p_2) \wedge P(p_3) \wedge$$
$$\neg(p_1 \approx p_2) \wedge \neg(p_1 \approx p_3) \wedge \neg(p_3 \approx p_2) \wedge$$
$$\forall l_1 \forall l_2 (L(l_1) \wedge L(l_2) \wedge I(l_1,p_1) \wedge I(l_1,p_2) \wedge I(l_2,p_1) \wedge I(l_2,p_2) \rightarrow$$
$$\forall p \forall q_1 \forall q_2 (P(p) \wedge I(p,l) \wedge \varphi(p,q_1,l_1) \wedge \varphi(p,q_2,l_2) \rightarrow R(p,q_1,q_2)))$$

2.

א. הפונקציה מחשבת את עומק עץ היצירה של פסוק. ההוכחה היא באינדוקציה על יצירת הפסוק.

ב. הפונקציה הנ"ל מחשבת את גודל עץ $F(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi \in S_0 \\ F(\psi_1)+1 & \psi = \neg\psi_1 \\ F(\psi_1)+F(\psi_2)+1 & \psi = \psi_1 \circ \psi_2 \end{cases}$

היצירה של פסוק. שוב – ההוכחה באינדוקציה טריביאלית.

ג.

$$F(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi \in S_0 \\ F(\psi_1)+2 & \psi = \neg\psi_1 \\ F(\psi_1)+F(\psi_2)+2 & \psi = \psi_1 \circ \psi_2 \end{cases} \quad (i$$

$$F(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi \in S_0 \\ F(\psi_1)+2 & \psi = \neg\psi_1 \\ F(\psi_1)+F(\psi_2)+4 & \psi = \psi_1 \circ \psi_2 \end{cases} \quad (ii$$

$$F(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi \in S_0 \\ F(\psi_1)+1 & \psi = \neg\psi_1 \\ F(\psi_1)+F(\psi_2) & \psi = \psi_1 \circ \psi_2 \end{cases} \quad (iii$$

3. נבחר כקבוצת מטרה את אוסף המחרוזות של תווים בתחשיב הפסוקים (כולל סוגריים). נביט בפונקציות הבאות, המוגדרות אף הן על מחרוזות של סימנים מתחשיב הפסוקים:

$G_0(P) = P$

$G_\neg(x) = \neg(x)$ (כלומר $G_\neg$ משרשרת לפני x סימן שלילה ואחריו סוגר שמאלי ואחרי x היא משרשרת סוגר ימני), ובאופן דומה:

$G_\circ(x_1, x_2) = (x_1 \circ x_2)$.

נניח שקיימת פונקציה F כמובטח במשפט ההגדרה ברקורסיה (ביחס לפונקציות $G_0, G_\neg, G_\circ$ שהוגדרו לעיל). אזי קל לוודא באינדוקציה שלכל פסוק φ, $F(\varphi)$ הוא פסוק בכתיבה של תחשיב הפסוקים כפי שהוגדר בכיתה (בלי קשר לכתיבה בה נתון היה φ מלכתחילה). עתה נניח בשלילה ש-F כנ"ל מוגדרת עבור תחשיב בו אין קריאה יחידה, ומכך נגיע לסתירה: יהי φ פסוק קצר ביותר שלו אין קריאה יחידה ונניח בה"כ כי $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2, \varphi = \varphi_1' \circ \varphi_2'$ ו-$\varphi_1 \neq \varphi_1'$. כעת, לפי המובטח במשפט הרקורסיה במקרה הראשון $F(\varphi) = F(\varphi_1 \circ \varphi_2) = G_\circ(\varphi_1, \varphi_2) = (F(\varphi_1) \circ F(\varphi_2))$, ו-$(F(\varphi_1) \circ F(\varphi_2))$ פסוק בתחשיב הפסוקים כפי שהוגדר בכיתה. במקרה השני, לעומת זאת, נקבל, $F(\varphi) = (F(\varphi_1') \circ F(\varphi_2'))$, שגם הוא פסוק בתחשיב הפסוקים כפי שהוגדר בכיתה. לכן בהכרח $(F(\varphi_1) \circ F(\varphi_2)) = (F(\varphi_1') \circ F(\varphi_2'))$, וממשפט הקריאה היחידה לתחשיב הפסוקים שהוגדר בכיתה נובע בפרט ש-$F(\varphi_1) = F(\varphi_1')$, אבל באינדוקציה טריביאלית בודקים שמההנחה ש-$\varphi_1 \neq \varphi_1'$ זה לא יתכן (טענה האינדוקציה ברורה לפסוקים יסודיים. מבחירת φ ל-φ_1, φ_1' קריאה יחידה. מכאן הטענה ש-$F(\varphi_1) \neq F(\varphi_1')$ נובעת מהנחת האינדוקציה עבור התת-פסוקים של φ_1, φ_1' ומהקריאה היחידה בתחשיב שהוגדר בכיתה).